**УЧИМСЯ ВЫЧИСЛЯТЬ ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ**

При вычислении пределов возникают ситуации (неопределенности) требующие преобразования функций, стоящих под знаком предела. Основными видов неопределенностей являются следующие неопределенности:

$$\frac{\infty }{\infty } ; \frac{0}{0} ; \left(\infty -\infty \right); 0∙\infty ; 1^{\infty }; 0^{0};\infty ^{0}.$$

 Для классификации типов пределов и способов раскрытия неопределённостей предлагается использовать таблицу, содержащую некоторые простейшие приемы раскрытия основных типов неопределенностей.

Таблица 1. Классификация типов пределов и способов раскрытия неопределённостей

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Вид (тип) неопределенности | Типфункции | Способ раскрытиянеопределенности | Пример |
| 1 | $$\frac{\infty }{\infty }$$ | Рациональная или иррацио-нальная функция | 1. Вынесение максимальной степени числителя и максимальной степени знаменателя и для дальнейшего упрощения выражения и избавления от бесконечности либо в числителе, либо в знаменателе | $$\lim\_{x\to \infty }\frac{\sqrt{x^{9}+3x^{5}-1}}{x^{2}+2x-6}=\left(\frac{\infty }{\infty }\right)=$$$$=\lim\_{x\to \infty }\frac{x^{3}∙\sqrt{1+\frac{3}{x^{4}}-\frac{1}{x^{9}}}}{x^{2}∙\left(1+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^{2}}\right)}=$$$$=\lim\_{x\to \infty }\frac{x∙\sqrt{1+\frac{3}{x^{4}}-\frac{1}{x^{9}}}}{1+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^{2}} }=$$$$=\left(\frac{\infty }{1}\right)=\infty $$ |

Продолжение табл. 1.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | $$\frac{\infty }{\infty }$$ | Рациональная функция | 2.Правило Лопиталя, если выполнены условия теоремы Лопиталя. | $$\lim\_{x\to \infty }\frac{e^{3x}}{4x+5}=\left(\frac{\infty }{\infty }\right)=$$$$=\lim\_{x\to \infty }\frac{3e^{3x}}{4}=\left(\frac{\infty }{4}\right)=\infty $$ |
| Иррациональная функция | 3.Правило Лопиталя приводит к трудоемким вычислениям |  |
| 2 | $$\frac{0}{0}$$ | Рациональная функция | 1.Разложение на множители числителя и знаменателя и дальнейшее сокращение дроби. | $$\lim\_{x\to 2}\frac{x^{2}-4}{x^{2}+x-6}≡\left(\frac{0}{0}\right)=$$$$=\lim\_{x\to 2}\frac{\left(x-2\right)∙\left(x+2\right)}{\left(x-2\right)∙\left(x+3\right)}=\frac{4}{7}$$ |
| Иррациональная функция | 2.Умножение на сопряженное к числителю или знаменателю, либо неполный квадрат суммы, для избавления от иррациональности и снятия неопределенности. | $$\lim\_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^{2}-49}==\lim\_{x\to 7}\frac{\left(2-\sqrt{x-3}\right)∙\left(2+\sqrt{x-3}\right)}{\left(x^{2}-49\right)∙\left(2+\sqrt{x-3}\right)}==\lim\_{x\to 7}\frac{4-\left(x-3\right)}{\left(x^{2}-49\right)∙\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=$$$$=\lim\_{x\to 7}\frac{7-x}{\left(x^{2}-49\right)∙\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=$$$$=\lim\_{x\to 7}\frac{-1}{\left(x+7\right)∙\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=-\frac{1}{56}$$ |
| общего вида | 3.Упрощение выражений в числителе и знаменателе, c использованием таблицы эквивалентностей. | $$\lim\_{x\to 0}\frac{arctg^{4}(7x)∙\left(x-3\right)^{3}}{sin^{2}(5x)∙\left(e^{9x}-1\right)^{2}}≡\left(\frac{0}{0}\right)=$$$$=\lim\_{x\to 2}\frac{\left(7x\right)^{4}∙\left(x-3\right)^{3}}{\left(5x\right)^{2}∙\left(9x\right)^{2}}=$$$$=\lim\_{x\to 2}\frac{\left(7x\right)^{4}∙\left(x-3\right)^{3}}{\left(5x\right)^{2}∙\left(9x\right)^{2}}=$$$$=\frac{7^{4}∙\left(-3\right)^{3}}{5^{2}∙9^{2}}==\frac{-7^{4}}{75}$$ |
| общего вида | 4. Правило Лопиталя, если выполнены условия теоремы Лопиталя. | $$\lim\_{x\to 0}\frac{sinx+arcsinx}{x^{2}+x}=$$$$=\lim\_{x\to 0}\frac{cosx+\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}}{2x+1}=1$$ |

Продолжение табл. 1.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 | $$\infty -\infty $$ | Иррацио-нальная функция | 1.Умножение и деление на сопряженное, либо неполный квадрат суммы и преобразование к виду дробис неопределенностью$\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty }{\infty }$ . | $$\lim\_{x\to \infty }\left(\sqrt{x^{2}+5x+3}-\sqrt{x^{2}-4x-3}\right)==\left(\infty -\infty \right)==\lim\_{x\to \infty }\frac{x^{24x+nмчислителе и знаменателе, сления пределов. основных типов неопределенностейнализао ошибочно принимаются за неопределенност}+5x+3-\left(x^{2}-4x-3\right)}{\sqrt{x^{2}+5x+3}+\sqrt{x^{2}-4x-3}}==\lim\_{x\to \infty }\frac{9x+6}{\sqrt{x^{2}+5x+3}+\sqrt{x^{2}-4x-3}}==\left(\frac{\infty }{\infty }\right)=$$$$=\lim\_{x\to \infty }\frac{9+\frac{6}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^{2}}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^{2}}}}=\frac{9}{2}$$ |
| Рациональная функция | 2.Приведение к общему знаменателю и получению дроби, чаще всего с неопределенностью типа$\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty }{\infty }$ . | $$\lim\_{x\to 0}\left(\frac{1}{sinx}-\frac{1}{tgx}\right)=\left(\infty -\infty \right)=$$$$=\lim\_{x\to 0}\frac{1-cosx}{sinx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\_{x\to 0}\frac{x^{2}}{2x}=0$$ |
| 4 | $$0∙\infty $$ | общего вида | Представлением одного из множителя функции в виде дроби $f\left(x\right)∙g\left(x\right)=$$$=\frac{f\left(x\right)}{\frac{1}{g\left(x\right)}}=\frac{g\left(x\right)}{\frac{1}{f\left(x\right)}}=$$$$=f\left(x\right)∙\frac{1}{\frac{1}{g\left(x\right)}}=$$$=\frac{1}{\frac{1}{f\left(x\right)}}∙g\left(x\right)$ , что приводит к неопределенностям типа$\frac{\infty }{\infty }$ и $\frac{0}{0}$ | $$\lim\_{x\to \infty } \left(x∙sin\frac{1}{x}\right)=\left(\infty ∙0\right)=$$$$=\lim\_{x\to \infty }\frac{sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\_{x\to \infty }\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$$ |

Окончание табл. 1.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 | $$1^{\infty }$$ | общего вида | Второй замечательный предел$$\lim\_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$$$$\lim\_{x\to \infty }\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$ | $$\lim\_{x\to \infty }\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x-7}=\left(1^{\infty }\right)=$$$$=\lim\_{x\to \infty }\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}∙\left(2x-7\right)∙\frac{3}{x}}=$$$$=e^{\lim\_{x\to \infty }\frac{3\left(2x-7\right)}{x}}=e^{6}$$ |
| 6 | $$1^{\infty }$$или$$0^{0}$$или$$\infty ^{0}$$ | общего вида | используя свойства логарифма, преобразуем исходную функцию $f(x)^{g(x)}$к виду $e^{g(x)∙ln⁡(f\left(x\right))}$ , что приводит к неопределенности типа $0∙\infty $ в степени, приводит к неопределенности типа $е^{0∙\infty }$ | $$\lim\_{x\to \infty }\left(cos\frac{3}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty }\right)=$$$$=e^{\lim\_{x\to \infty }\left(x∙ln⁡(cos\frac{3}{x})\right)}=\left(e^{\left(0∙\infty \right)}\right)=$$$$=e^{\lim\_{x\to \infty }\left(x∙ln⁡(1+(cos\frac{3}{x}-1))\right)}=$$$$=e^{\lim\_{x\to \infty }\left(x∙⁡(cos\frac{3}{x}-1)\right)}=$$$$=e^{\lim\_{x\to \infty }\left(x∙\left(-\frac{9}{2x^{2}}\right)\right)}=e^{\lim\_{x\to \infty }\left(-\frac{9}{2x}\right)}=$$$$=1$$ |
| 7 | $$\frac{\infty }{0}$$ | общего вида | **НЕ ЯВЛЯЕТСЯ** неопределенностью, предел стремится к $\infty $, т.к. $\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=$$$=f\left(x\right)∙\frac{1}{g\left(x\right)}\rightarrow \infty ∙\infty =\infty $$при условии$$g\left(x\right)\rightarrow 0 и f(x)\rightarrow \infty $$ | $$\lim\_{x\to 3+0}\frac{ln\left(x-3\right)}{x^{2}-2x-3}=\left(\frac{\infty }{0}\right)=\infty $$ |
| 8 | $$\frac{0}{\infty }$$ | общего вида | **НЕ ЯВЛЯЕТСЯ** неопределенностью, предел стремится к $0$, т.к. $\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=$$$=f\left(x\right)∙\frac{1}{g\left(x\right)}\rightarrow 0∙0=0$$при условии$$g\left(x\right)\rightarrow \infty и f(x)\rightarrow 0$$ | $$\lim\_{x\to \infty }\frac{sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{3}+5}≡\left(\frac{0}{\infty }\right)=0$$ |

В таблице приводится не только вид (тип) неопределенности, но и те случаи, которые часто ошибочно принимаются за неопределенности. Представленная таблица позволяет сконцентрировать и обобщить основные приемы пределов функций. Надеемся, что наша таблица поможет лучше освоить азы курса математического анализа.

**Литература:**

1.Абанина Т.И. Математика Справочник для студентов вузов, техникумов, колледжей. Ростов на Дону, Феникс, 2014, 377с.

2. Аксененкова И.М. и др. Математический анализ. 1 семестр Учебное пособие. Для студентов очной формы обучения институтов РТС,ИТ,ФТИ. МИРЭА Москва., 2017, 129с.

3. Игонина Т.Р., Параскевопуло О.Р. Один из способов обучения студентов классификации особых точек. Научно-техническая конференция МИРЭА. 2017.