**Формула Тейлора.**

*Многочлен Тейлора*

Пусть функция определена в окрестности точки и имеет производные до n-го порядка включительно в самой точке Требуется найти многочлен степени принимающий в точке одинаковые значения с функцией и её производными до n-го порядка включительно. Другими словами, ищется такой многочлен для данной функции , чтобы значение функции и всех её производных в точке совпадало со значениями многочлена, т.е.

Этот многочлен будет близок к функции в окрестности точки

Многочлен будем искать в виде

т.е. сумма разности в степенях от 0 до n с неопределенными коэффициентами. Эти коэффициенты определим из условий равенства значения функции и всех её производных в точке со значениями многочлена и всех его производных в точке .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Тогда многочлен примет вид

**Определение 1.** Такого вида многочлен называют многочленом Тейлора для данной функции

*Формула Тейлора*

Многочлен Тейлора, совпадая в самой точке со значением функции , для точек из проколотой окрестности точки отличается от функции . Оценим порядок малости разности функции и многочлена Тейлора относительно приращения аргумента,

**Определение 2.** Выражение вида называется остаточным членом формулы Тейлора.

***Теорема 1.*** Если функции имеет в точке производные до n-го порядка включительно, то .

**Определение 3.** остаточным членом формулы Тейлора записанный в виде

называется остаточным членом в форме Пеано.

*Доказательство:* Выражение эквивалентно тому, что

Вычислим этот предел, чтоб доказать справедливость

выражения

Итак

**Определение 4.** Выражение

называется локальной формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

**Определение 5.** Формула Тейлора в точке называется формулой Маклорена

Однако остаточный член в форме Пеано дает лишь порядок малости разности и не позволяет оценить его численные значения. Для этого получим остаточный член в форме Лагранжа. Предположим, что функция дифференцируема раз на отрезке ю Построим многочлен степени

Для этого многочлена выполняются условия:

Потребуем, чтобы , т.е. подберем соответствующим образом.

Тогда функция будет удовлетворять условиям:

Для функции выполняются условия теоремы Ролля. Применим теорему Ролля к функции , затем к затем к и т.д. до . Тогда получим, что

или **Определение 6.** Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид:

где

Значение берем не в самой точке **,** а в некоторой надлежащим образом выбранной точке **,** зависит от **.**

**Замечание 1.** Из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа сразу получается формула Лагранжа ( формула конечных приращений)

**Замечание 2.** Еслипроизводные функции ограничены в окрестности точки , т.е. , то справедлива следующая оценка остаточного члена

*Формула Тейлора*

*Формула Тейлора для элементарных функций*

Запишем формулы Тейлора для основных элементарных функций :

в точке , поэтому правильнее сказать, запишем формулы Маклорена.

Выпишем производные этих функций, найдем их значения в , постараемся найти закономерность и записать формулу Маклорена.

**1.** Для функции , выпишем производные функций, найдем их значения в точке ,

Подставим в формулу Маклорена и получим формулу разложения

функции в окрестности точки 0 по степеням :

**2.** Для функции , выпишем производные функций, найдем их значения в точке ,

Подставим в формулу Маклорена и получим формулу разложения

функции в окрестности точки 0 по степеням :

**Замечание 1.** функции раскладывается только по нечетным степеням **.**

**3.** Для функции , выпишем производные функций, найдем их значения в точке ,

Подставим в формулу Маклорена и получим формулу разложения

функции в окрестности точки 0 по степеням :

**Замечание 2.** функции раскладывается только по четным степеням **.**

**4.** Для функции , выпишем производные функций, найдем их значения в точке ,

Подставим в формулу Маклорена и получим формулу разложения

функции в окрестности точки 0 по степеням :

**5.** Для функции , выпишем производные функций, найдем их значения в точке ,

Подставим в формулу Маклорена и получим формулу разложения

функции в окрестности 0 по степеням :

Рассмотрим два частных, но очень важных случая разложения функции

**6.**

Подставим в разложение функции и получим

И

**7.**

Подставим в разложение функции и получим

|  |
| --- |
| *Формула Тейлора (Маклорена) для элементарных функций*  *с остаточным членом в форме Пеано* |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

*Применение формулы Тейлора*

1. Для приближенных вычислений.

формула Маклорена для функции позволяет вычислять приближенное значение корней. Например,

2. Для вычислений пределов функций. Вычислить предел