**Формула Тейлора.**

*Многочлен Тейлора*

Пусть функция $y=f\left(x\right)$ определена в окрестности точки $a$ и имеет производные до n-го порядка включительно в самой точке $a.$ Требуется найти многочлен степени $\leq n T\_{n}\left(x\right), $ принимающий в точке $a$ одинаковые значения с функцией и её производными до n-го порядка включительно. Другими словами, ищется такой многочлен для данной функции $y=f\left(x\right)$ , чтобы значение функции и всех её производных в точке $a$ совпадало со значениями многочлена, т.е.

 $T\_{n}\left(x\right)=f\left(a\right), T\_{n}^{'}\left(x\right)=f^{'}\left(a\right), … , T\_{n}^{\left(n\right)}\left(x\right)=f^{\left(n\right)}\left(a\right) $

Этот многочлен будет близок к функции $y=f\left(x\right)$ в окрестности точки $a.$

Многочлен $T\_{n}\left(x\right)$ будем искать в виде

$$T\_{n}\left(x\right)=a\_{0}+a\_{1}∙\left(x-a\right)+a\_{2}∙\left(x-a\right)^{2}+…+a\_{n}∙\left(x-a\right)^{n}$$

т.е. сумма разности $\left(x-a\right)$ в степенях от 0 до n с неопределенными коэффициентами. Эти коэффициенты $a\_{0}, a\_{1},a\_{2},…,a\_{n}$ определим из условий равенства значения функции и всех её производных в точке $a$ со значениями многочлена и всех его производных в точке $a$ .

 $a\_{0}=T\_{n}\left(a\right)=f\left(a\right) => a\_{0}=f\left(a\right)=\frac{f\left(a\right)}{0!} $

$$T\_{n}^{'}\left(x\right)=a\_{1}+2a\_{2}∙\left(x-a\right)^{1}+…+na\_{n}∙\left(x-a\right)^{n-1}$$

$$a\_{1}=T\_{n}^{'}\left(a\right)=f^{'}\left(a\right) => a\_{1}=f^{'}\left(a\right)=\frac{f^{'}\left(a\right)}{1!}$$

$$T\_{n}^{''}\left(x\right)=2a\_{2}+3∙2a\_{3}∙\left(x-a\right)^{1}…+n\left(n-1\right)a\_{n}∙\left(x-a\right)^{n-2}$$

$$2a\_{2}=T\_{n}^{''}\left(a\right)=f^{''}\left(a\right) => a\_{2}=\frac{f^{''}\left(a\right)}{2}=\frac{f^{''}\left(a\right)}{2!}$$

$$T\_{n}^{'''}\left(x\right)=3∙2a\_{3}+4∙3∙2a\_{4}∙\left(x-a\right)^{1}…+n\left(n-1\right)\left(n-2\right)a\_{n}∙\left(x-a\right)^{n-3}$$

$$3∙2a\_{3}=T\_{n}^{'''}\left(a\right)=f^{''}^{'\left(a\right)} => a\_{3}=\frac{f^{'''}\left(a\right)}{3∙2}=\frac{f^{'''}\left(a\right)}{3!}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$T\_{n}^{\left(n\right)}\left(x\right)=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)∙…3∙2∙1∙a\_{n}∙\left(x-a\right)^{n-n}$$

$$n\left(n-1\right)\left(n-2\right)∙…3∙2∙1∙a\_{3}=T\_{n}^{\left(n\right)}\left(a\right)=f^{\left(n\right)}\left(a\right) =>$$

$$ a\_{3}=\frac{f^{\left(n\right)}\left(a\right)}{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)∙…3∙2∙1}=\frac{f^{\left(n\right)}\left(a\right)}{n!}$$

Тогда многочлен примет вид

$$T\_{n}\left(x\right)=f\left(a\right)+\frac{f^{'}\left(a\right)}{1!}∙\left(x-a\right)+\frac{f^{''}\left(a\right)}{2!}∙\left(x-a\right)^{2}+…+\frac{f^{\left(n\right)}\left(a\right)}{n!}∙\left(x-a\right)^{n}$$

**Определение 1.** Такого вида многочлен называют многочленом Тейлора для данной функции $y=f\left(x\right)$

*Формула Тейлора*

Многочлен Тейлора, совпадая в самой точке со значением функции $y=f\left(x\right)$ , для точек из проколотой окрестности точки $a$ отличается от функции $y=f\left(x\right)$. Оценим порядок малости разности функции и многочлена Тейлора относительно приращения аргумента$ \left(x-a\right)$, $R\_{n}\left(x\right)=f\left(x\right)-T\_{n}\left(x\right)$

**Определение 2.** Выражение вида $R\_{n}\left(x\right)=f\left(x\right)-T\_{n}\left(x\right)$ называется остаточным членом формулы Тейлора.

***Теорема 1.*** Если функции $y=f\left(x\right)$ имеет в точке $a$ производные до n-го порядка включительно, то $R\_{n}\left(x\right)=f\left(x\right)-T\_{n}\left(x\right)=\overbar{o}\left[\left(x-a\right)^{n}\right]$.

**Определение 3.** остаточным членом формулы Тейлора записанный в виде

$$R\_{n}\left(x\right)=f\left(x\right)-T\_{n}\left(x\right)=\overbar{o}\left[\left(x-a\right)^{n}\right]$$

называется остаточным членом в форме Пеано.

*Доказательство:* Выражение $R\_{n}\left(x\right)=\overbar{o}\left[\left(x-a\right)^{n}\right]$ эквивалентно тому, что

$$ \lim\_{x\to a}\frac{R\_{n}\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n}}=0$$

Вычислим этот предел, чтоб доказать справедливость

выражения $R\_{n}\left(x\right)=\overbar{o}\left[\left(x-a\right)^{n}\right]$

$$\lim\_{x\to a}\frac{R\_{n}\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n}}=\lim\_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-T\_{n}\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n}}=$$

$$=\lim\_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-\left[f\left(a\right)+\frac{f^{'}\left(a\right)}{1!}∙\left(x-a\right)+\frac{f^{''}\left(a\right)}{2!}∙\left(x-a\right)^{2}+…+\frac{f^{\left(n\right)}\left(a\right)}{n!}∙\left(x-a\right)^{n}\right]}{\left(x-a\right)^{n}}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\begin{array}{c}применим \\правило Лопиталя\end{array}}{\overbrace{ = }}$$

$$\lim\_{x\to a}\frac{f^{'}\left(x\right)-\left[f^{'}\left(a\right)+2∙\frac{f^{''}\left(a\right)}{2!}∙\left(x-a\right)^{1}+…+n∙\frac{f^{\left(n\right)}\left(a\right)}{n!}∙\left(x-a\right)^{n-1}\right]}{n∙\left(x-a\right)^{n-1}}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\begin{array}{c}применим \\правило Лопиталя\end{array}}{\overbrace{ = }}$$

$$\lim\_{x\to a}\frac{f^{''}\left(x\right)-\left[f^{''}\left(a\right)+3∙2∙\frac{f^{'''}\left(a\right)}{3!}∙\left(x-a\right)^{1}+…+n∙\left(n-1\right)∙\frac{f^{\left(n\right)}\left(a\right)}{n!}∙\left(x-a\right)^{n-2}\right]}{n∙\left(n-1\right)∙\left(x-a\right)^{n-2}}=$$

$$=…=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\begin{array}{c}применим \\правило Лопиталя\\n-1 раз\end{array}}{\overbrace{ = }}=$$

$$=\lim\_{x\to a}\frac{f^{\left(n-1\right)}\left(x\right)-\left[f^{\left(n-1\right)}\left(a\right)++n!∙f^{\left(n\right)}\left(a\right)∙\left(x-a\right)^{1}\right]}{n!∙\left(x-a\right)^{1}}=$$

$$=\frac{1}{n!}\lim\_{x\to a}\frac{f^{\left(n-1\right)}\left(x\right)-f^{\left(n-1\right)}\left(a\right)}{\left(x-a\right)}-\frac{1}{n!}\lim\_{x\to a}f^{\left(n\right)}\left(a\right)=\frac{1}{n!}\left[f^{\left(n\right)}\left(a\right)-f^{\left(n\right)}\left(a\right)\right]=0 ∎$$

Итак

**Определение 4.** Выражение

$$f\left(x\right)=f\left(a\right)+\frac{f^{'}\left(a\right)}{1!}∙\left(x-a\right)+\frac{f^{''}\left(a\right)}{2!}∙\left(x-a\right)^{2}+…+\frac{f^{\left(n\right)}\left(a\right)}{n!}∙\left(x-a\right)^{n}+\overbar{o}\left[\left(x-a\right)^{n}\right]$$

называется локальной формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

**Определение 5.** Формула Тейлора в точке $x=a$ называется формулой Маклорена

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+\frac{f^{'}\left(0\right)}{1!}∙x+\frac{f^{''}\left(a\right)}{2!}∙x^{2}+…+\frac{f^{\left(n\right)}\left(a\right)}{n!}∙x^{n}+\overbar{o}\left(x^{n}\right)$$

Однако остаточный член в форме Пеано дает лишь порядок малости разности $f\left(x\right)-T\_{n}\left(x\right)$ и не позволяет оценить его численные значения. Для этого получим остаточный член в форме Лагранжа. Предположим, что функция $y=f\left(x\right)$ дифференцируема $\left(n+1\right)$ раз на отрезке$\left[a,b\right]$ ю Построим многочлен степени $\left(n+1\right):$

$$T\_{n+1}\left(x\right)=f\left(a\right)+\frac{f^{'}\left(a\right)}{1!}∙\left(x-a\right)+…+\frac{f^{\left(n\right)}\left(a\right)}{n!}∙\left(x-a\right)^{n}+A\_{n+1}∙\left(x-a\right)^{n+1}$$

Для этого многочлена выполняются условия:

$$T\_{n+1}\left(x\right)=f\left(a\right), T\_{n+1}^{'}\left(x\right)=f^{'}\left(a\right), … , T\_{n+1}^{\left(n\right)}\left(x\right)=f^{\left(n\right)}\left(a\right)$$

Потребуем, чтобы $T\_{n+1}\left(b\right)=f\left(b\right)$ , т.е. подберем $A\_{n+1}$ соответствующим образом.

Тогда функция $F\left(x\right)=f\left(x\right)-T\_{n+1}\left(x\right)$ будет удовлетворять условиям:

$$F\left(a\right)=F\left(b\right)=0, F^{'}\left(a\right)=0, F^{''}\left(a\right)=0, … , F^{\left(n\right)}\left(a\right)=0$$

Для функции $F\left(x\right)=f\left(x\right)-T\_{n+1}\left(x\right)$ выполняются условия теоремы Ролля. Применим теорему Ролля к функции $F\left(x\right)$, затем к $F^{'}\left(x\right), $ затем к $ F^{''}\left(x\right)$ и т.д. до $F^{\left(n\right)}\left(x\right)$. Тогда получим, что $∃ ξ : F^{\left(n+1\right)}\left(ξ\right)=0 , ξ\in \left(a,b\right) =>$

$$f^{\left(n+1\right)}\left(ξ\right)=T\_{n+1}^{\left(n+1\right)}\left(ξ\right)=\left(n+1\right)! ∙A\_{n+1} => A\_{n+1}=\frac{f^{\left(n+1\right)}\left(ξ\right)}{\left(n+1\right)!} $$

$$f\left(b\right)=T\_{n+1}\left(b\right)=f\left(a\right)+\frac{f^{'}\left(a\right)}{1!}∙\left(b-a\right)+…+\frac{f^{\left(n\right)}\left(a\right)}{n!}∙\left(b-a\right)^{n}+\frac{f^{\left(n+1\right)}\left(ξ\right)}{\left(n+1\right)!}∙\left(b-a\right)^{n+1}$$

или **Определение 6.** Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид:

$$f\left(x\right)=f\left(a\right)+\frac{f^{'}\left(a\right)}{1!}∙\left(x-a\right)+…+\frac{f^{\left(n\right)}\left(a\right)}{n!}∙\left(x-a\right)^{n}+\frac{f^{\left(n+1\right)}\left(ξ\right)}{\left(n+1\right)!}∙\left(x-a\right)^{n+1}$$

$$R\_{n}\left(x\right)=\frac{f^{\left(n+1\right)}\left(ξ\right)}{\left(n+1\right)!}∙\left(x-a\right)^{n+1}$$

где $a<ξ<x или x<ξ<a$

Значение $f^{\left(n+1\right)}$берем не в самой точке$a$**,** а в некоторой надлежащим образом выбранной точке $ξ$**,** $ξ$зависит от$x$**.**

**Замечание 1.** Из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа сразу получается формула Лагранжа ( формула конечных приращений)

$$f\left(x\right)=f\left(a\right)+\frac{f^{'}\left(ξ\right)}{1!}∙\left(x-a\right) => f^{'}\left(ξ\right)=\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{\left(x-a\right)} $$

**Замечание 2.** Еслипроизводные функции$ y=f\left(x\right)$ ограничены в окрестности точки $a$ , т.е. $∃ M>0 : ∀n ∀x\in U\left(a\right) \left|f^{\left(n+1\right)}\left(x\right)\right|<M$, то справедлива следующая оценка остаточного члена

$$ \left|R\_{n}\left(x\right)\right|<\frac{M∙\left|x-a\right|^{\left(n+1\right)}}{\left(n+1\right)!}$$

*Формула Тейлора*

$$$$

$$$$

$$$$

*Формула Тейлора для элементарных функций*

Запишем формулы Тейлора для основных элементарных функций :

 $y\_{1}=e^{x} y\_{2}=sinx y\_{3}=cosx y\_{4}=\left(1+x\right)^{m} y\_{5}=ln\left(1+x\right) $

в точке $x=a=0$ , поэтому правильнее сказать, запишем формулы Маклорена.

Выпишем производные этих функций, найдем их значения в $x=a=0$, постараемся найти закономерность и записать формулу Маклорена.

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+\frac{f^{'}\left(0\right)}{1!}∙x+\frac{f^{''}\left(a\right)}{2!}∙x^{2}+…+\frac{f^{\left(n\right)}\left(a\right)}{n!}∙x^{n}+\overbar{o}\left(x^{n}\right)$$

**1.** Для функции $y\_{1}=e^{x}$ , выпишем производные функций, найдем их значения в точке $a=0$,

$$y\_{1}^{'}=e^{x} y\_{1}^{''}=e^{x} y\_{1}^{'''}=e^{x} … y\_{1}^{\left(n\right)}=e^{x} $$

$$ y\_{1}\left(0\right)=e^{0}=1 y\_{1}^{'}\left(0\right)=e^{0}=1 y\_{1}^{''}\left(0\right)=e^{0}=1 y\_{1}^{'''}\left(0\right)=e^{0}=1 …$$

$$ … y\_{1}^{\left(n\right)}\left(0\right)=e^{0}=1$$

Подставим в формулу Маклорена и получим формулу разложения

 функции $y\_{1}=e^{x}$ в окрестности точки 0 по степеням$ x$ :

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+…+\frac{x^{n}}{n!}+R\_{n}\left(x\right)$$

**2.** Для функции $ y\_{2}=sinx$ , выпишем производные функций, найдем их значения в точке $a=0$,

$$y\_{2}^{'}=cosx y\_{2}^{''}=-sinx y\_{2}^{'''}=-cosx y\_{2}^{\left(4\right)}=sinx…$$

$$… y\_{2}^{\left(n=2k\right)}=\left(-1\right)^{k}sinx y\_{2}^{\left(n=2k+1\right)}=\left(-1\right)^{k}cosx $$

$$ y\_{2}\left(0\right)=0 y\_{2}^{'}\left(0\right)=1 y\_{2}^{''}\left(0\right)=0 y\_{2}^{'''}\left(0\right)=-1 y\_{2}^{\left(4\right)}\left(0\right)=0… $$

$$… y\_{2}^{\left(n=2k\right)}\left(0\right)=0 y\_{2}^{\left(n=2k+1\right)}\left(0\right)=\left(-1\right)^{k} $$

Подставим в формулу Маклорена и получим формулу разложения

 функции $ y\_{2}=sinx$ в окрестности точки 0 по степеням$ x$ :

$$sinx=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}+…+\frac{\left(-1\right)^{k}∙x^{2k-1}}{\left(2k-1\right)!}+R\_{2k}\left(x\right)$$

**Замечание 1.** функции $ y\_{2}=sinx$ раскладывается только по нечетным степеням $x$**.**

**3.** Для функции $ y\_{3}=cosx$ , выпишем производные функций, найдем их значения в точке $a=0$,

$$y\_{3}^{'}=-sinx y\_{3}^{''}=-cosx y\_{3}^{'''}=sinx y\_{3}^{\left(4\right)}=cosx…$$

$$… y\_{3}^{\left(n=2k-1\right)}=\left(-1\right)^{k}sinx y\_{3}^{\left(n=2k\right)}=\left(-1\right)^{k}cosx $$

$$ y\_{3}\left(0\right)=1 y\_{3}^{'}\left(0\right)=0 y\_{2}^{''}\left(0\right)=-1 y\_{2}^{'''}\left(0\right)=-1 y\_{2}^{\left(4\right)}\left(0\right)=0… $$

$$… y\_{2}^{\left(n=2k\right)}\left(0\right)=0 y\_{2}^{\left(n=2k+1\right)}\left(0\right)=\left(-1\right)^{k} $$

Подставим в формулу Маклорена и получим формулу разложения

 функции $ y\_{3}=cosx$ в окрестности точки 0 по степеням$ x$ :

$$cosx=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\frac{x^{6}}{6!}+…+\frac{\left(-1\right)^{k}∙x^{2k}}{\left(2k\right)!}+R\_{2k+1}\left(x\right)$$

**Замечание 2.** функции $ y\_{3}=cosx$ раскладывается только по четным степеням $x$**.**

 **4.** Для функции $y\_{4}=\left(1+x\right)^{m} $, выпишем производные функций, найдем их значения в точке $a=0$,

$$y\_{4}^{'}=m∙\left(1+x\right)^{m-1} y\_{4}^{''}= m∙\left(m-1\right)∙\left(1+x\right)^{m-2} $$

$$ y\_{4}^{'''}=m∙\left(m-1\right)∙\left(m-2\right)∙\left(1+x\right)^{m-3} …$$

$$… y\_{4}^{\left(n\right)}=m∙\left(m-1\right)∙\left(m-2\right)…\left(m-\left(n-1\right)\right)\left(1+x\right)^{m-n} $$

$$ y\_{4}\left(0\right)=1^{m}=1 y\_{4}^{'}\left(0\right)=m y\_{1}^{''}\left(0\right)=m∙\left(m-1\right) $$

$$ y\_{1}^{'''}\left(0\right)=m∙\left(m-1\right)∙\left(m-2\right) …$$

$$ … y\_{1}^{\left(n\right)}\left(0\right)=m∙\left(m-1\right)∙\left(m-2\right)…\left(m-\left(n-1\right)\right)$$

Подставим в формулу Маклорена и получим формулу разложения

 функции $y\_{4}=\left(1+x\right)^{m}$ в окрестности точки 0 по степеням$ x$ :

$$\left(1+x\right)^{m}=1+mx+\frac{m∙\left(m-1\right)x^{2}}{2!}+\frac{m∙\left(m-1\right)∙\left(m-2\right)x^{3}}{3!}+ $$

$$+…+\frac{m∙\left(m-1\right)∙\left(m-2\right)…\left(m-\left(n-1\right)\right)x^{n}}{n!}+R\_{n}\left(x\right)$$

**5.** Для функции $ y\_{5}=ln\left(1+x\right)$ , выпишем производные функций, найдем их значения в точке $a=0$,

$$y\_{5}^{'}=\frac{1}{\left(1+x\right)}=\left(1+x\right)^{-1} y\_{1}^{''}=-1∙\left(1+x\right)^{-2} y\_{1}^{'''}=-1∙\left(-2\right)∙\left(1+x\right)^{-3} …$$

$$… y\_{1}^{\left(n\right)}=-1∙\left(-2\right)∙…∙\left(-\left(n-1\right)\right)\left(1+x\right)^{-n} $$

$$ y\_{5}\left(0\right)=0 y\_{5}^{'}\left(0\right)=1 y\_{5}^{''}\left(0\right)=-1 y\_{5}^{'''}\left(0\right)=-1∙\left(-2\right) …$$

$$ … y\_{5}^{\left(n\right)}\left(0\right)=-1∙\left(-2\right)∙…∙\left(-\left(n-1\right)\right)=\left(-1\right)^{n+1}∙\left(n-1\right)!$$

Подставим в формулу Маклорена и получим формулу разложения

 функции $\left(1+x\right)$ в окрестности 0 по степеням$ x$ :

$$ln\left(1+x\right)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}+…\frac{\left(-1\right)^{n+1}∙x^{n}}{n}+R\_{n}\left(x\right)$$

Рассмотрим два частных, но очень важных случая разложения функции $y\_{4}=\left(1+x\right)^{m}$

**6.** $m=-1 y\_{6}=\left(1+x\right)^{-1}=\frac{1}{1+x}$

Подставим в разложение функции $y\_{4}=\left(1+x\right)^{m}$ $m=-1 $ и получим

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^{2}-x^{3}+ +…+\left(-1\right)^{n}∙x^{n}+R\_{n}\left(x\right)$$

И

 **7.** $m=-1 y\_{7}=\left(1-x\right)^{-1}=\frac{1}{1-x}$

Подставим в разложение функции $y\_{4}=\left(1-x\right)^{m}$ $m=-1 $ и получим

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+x^{3}+ +…+x^{n}+R\_{n}\left(x\right)$$

|  |
| --- |
| *Формула Тейлора (Маклорена) для элементарных функций* *с остаточным членом в форме Пеано* |
| $$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+…+\frac{x^{n}}{n!}+\overbar{o}\left(x^{n}\right)$$ |
| $$sinx=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}+…+\frac{\left(-1\right)^{k}∙x^{2k+1}}{\left(2k+1\right)!}+\overbar{o}\left(x^{2k+2}\right)$$ |
| $$cosx=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\frac{x^{6}}{6!}+…+\frac{\left(-1\right)^{k}∙x^{2k}}{\left(2k\right)!}+\overbar{o}\left(x^{2k+1}\right)$$ |
| $$\left(1+x\right)^{m}=1+mx+\frac{m∙\left(m-1\right)x^{2}}{2!}+\frac{m∙\left(m-1\right)∙\left(m-2\right)x^{3}}{3!}+ $$$$+…+\frac{m∙\left(m-1\right)∙\left(m-2\right)…\left(m-\left(n-1\right)\right)x^{n}}{n!}+\overbar{o}\left(x^{n}\right)$$ |
| $$ln\left(1+x\right)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}+…\frac{\left(-1\right)^{n+1}∙x^{n}}{n}+\overbar{o}\left(x^{n}\right)$$ |
| $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^{2}-x^{3}+ +…+\left(-1\right)^{n}∙x^{n}+\overbar{o}\left(x^{n}\right)$$ |
| $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+x^{3}+ +…+x^{n}+\overbar{o}\left(x^{n}\right)$$ |

*Применение формулы Тейлора*

1. Для приближенных вычислений.

формула Маклорена для функции $y=\left(1+x\right)^{m}$ позволяет вычислять приближенное значение корней. Например,

$$\left(1+x\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{x^{2}}{2!}+\overbar{o}\left(x^{2}\right)=> $$

$$ \sqrt{1,004}=1+\frac{1}{2}∙0,004+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{\left(1,004\right)^{2}}{2!}=1+0,002-\frac{1}{8}∙0,000016≈1,001998$$

2. Для вычислений пределов функций. Вычислить предел

$$\lim\_{x\to 0}\frac{sinx-x}{x^{3}}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim\_{x\to 0}\frac{sinx-x}{x^{3}}==\lim\_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^{3}}{3!}+\overbar{o}\left(x^{3}\right)-x}{x^{3}}=$$

$$=\lim\_{x\to 0}\frac{-\frac{x^{3}}{3!}+\overbar{o}\left(x^{3}\right)}{x^{3}}=\lim\_{x\to 0}\frac{-\frac{x^{3}}{3!}}{x^{3}}+\lim\_{x\to 0}\frac{\overbar{o}\left(x^{3}\right)}{x^{3}}=-\frac{1}{6}+0=-\frac{1}{6}$$