**Основные теоремы дифференциального исчисления**

***Теорема Ферма***

Если функция определена на и своего экстремума достигает в некоторой внутренней точке и в точке функция дифференцируема, тогда

.

*Геометрический смысл теоремы*: если функция в точке имеет экстремум и в этой точке функция дифференцируема, то касательная, проведенная к графику функции в этой точке, параллельна оси Ох.

*Доказательство:* Пусть, например, точка – точка максимума. Придадим в точке приращение , тогда функция получит приращение

По определению максимума

Разделим на

По условию в точке функция дифференцируема, значит,

***Теорема Ролля***

Если функция

1.непрерывна на

2. дифференцируема на

3. ,

то (существует) хотя бы одна точка такая, что

.

*Геометрический смысл теоремы*: если функция непрерывна и дифференцируема на отрезке, то хотя бы в одной точке отрезка касательная, проведенная к графику функции в этой точке, параллельна оси Ох.

*Доказательство:* 1. Если функция то за точку можно взять любую точку отрезка

2.Если функция не постоянна, то своего наибольшего или наименьшего значения она достигает в некоторой внутренней точке отрезка , а тогда по теореме Ферма в этой .

**Замечание 1.**

Не выполнение хотя бы одного из трех условий теоремы Ролля может привести к тому, что точка, в которой производная обращается в нуль, может и не существовать.

первое условие: непрерывность функции



второе условие: дифференцируемость функции



третье условие:

**Замечание 2**.

Точек, в которых производная обращается в нуль, у функции может быть несколько.

**Замечание 3.**

Если , то по теореме Ролля получаем, что между двумя различными действительными корнями уравнения

Найдется хотя бы один действительный корень уравнения .

***Теорема Лагранжа*** *(формула конечных приращений)*

Если функция

1. непрерывна на

2. дифференцируема на ,

то (существует) хотя бы одна точка такая, что

 .

*Это формула Лагранжа или формула конечных приращений.*

*Геометрический смысл теоремы*: Рассмотрим функцию , удовлетворяющую на отрезке условиям теоремы Лагранжа. Проведем стягивающую хорду AB, тогда отношение (рис 7.)

Где - угол наклона хорды AB к оси Ох. По теореме Лагранжа, найдется хотя бы одна точка в которой касательная будет иметь тот же угол наклона, что и стягивающая хорда AB.

*Доказательство:* Построим вспомогательную функцию

и параметр выбираем так, чтобы функция удовлетворяла условиям теоремы Ролля, т.е. чтобы , так как непрерывность и дифференцируемость функции очевидны.

Находим параметр

Но если функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля, то найдется точка такая, что

**Замечание 1**.

Точек, в которых касательные будет иметь тот же угол наклона, что и стягивающая хорда AB, у функции может быть несколько.

**Замечание 2**.

Если удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа и точки , то для отрезка будет иметь место выражение , где С- некоторая точка, лежащая между .

***Теорема Коши***

Если на отрезке определены две функции и , которые

1. непрерывны на

2. дифференцируема на

3.,

тогда (существует) хотя бы одна точка такая, что

т.е. отношение приращения функций на отрезке равно отношению производных этих функций в специально выбранной внутренней точке отрезка.

*Доказательство:* Построим вспомогательную функцию

и параметр выбираем так, чтобы функция удовлетворяла условиям теоремы Ролля, т.е. чтобы , так как непрерывность и дифференцируемость функции очевидны ( так как функции и непрерывны на и дифференцируема на )

 Находим параметр:

Но если функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля, то найдется точка такая, что

***Теорема Лопиталя*** *( правило Лопиталя)*

Если две функции и , которые

1. бесконечно малые функции при

2. дифференцируемы в окрестности точки )

3.

4.(существует) конечный или бесконечный предел отношения производных функций и

 ,

то

предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения производных этих функций.

*Доказательство:* Обе функции в удовлетворяют условиям теоремы Коши. Кроме того, так как

и функции в непрерывны, то . Применим теорему Коши к интервалу т.е.

Перейдем к пределу при

 так как при и

**Замечание 1.**

Правило Лопиталя применимо и для раскрытия неопределенностей типа .

Примеры