**Непрерывность функции**

При определении предела функции в точке было не существенно, определена ли функция в предельной точке или нет. Рассмотрим теперь класс функций, определенных в некоторой окрестности точки , в самой точке функция может быть определена или неопределёна.

**Определение 1.** Функция называется непрерывной

в точке , если

1.функция определена в точке ,

2. существует конечный предел при

3. предел существует и равен значению функции в точке

Это же определение можно записать на языке

**Определение 2.** Функция называется непрерывной

в точке , если

1.функция определена в точке ,

2. функция определена в некоторой окрестности точки

3.

Из данного определения следует, что предел непрерывной функции равен функции от предела, т.е.

Знак предела и знак непрерывной функции можно менять местами.

Пусть теперь точка функции вместе с некоторой окрестностью. Придадим в точке приращение любого знака. Тогда

функция , принимая в точке значение , получит некоторое приращение

по определению 1 функция непрерывна в точке , если

или

или

Так дадим третье определение функции непрерывной в точке , с помощью приращений.

**Определение 3.** Функция называется непрерывной

в точке , если функция определена в точке и в некоторой окрестности точки , и предел приращения функции равен нулю, когда приращение аргумента стремится к нулю, т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение непрерывной функции.

**Определение 4.** Функция называется непрерывной в окрестности точки , если она непрерывна в каждой точке окрестности.

***Свойства непрерывных функций***

***Теорема1.*** Элементарные функции непрерывны в любой точке своей области определения. (Элементарные функции это функции )

*Доказательство:* Доказательство приведём на примере функции , воспользуемся определением 3. Фиксируем любую точку , придадим в точке приращение , тогда функция получит некоторое приращение

т.е. функция непрерывна в точке , а ввиду произвольного выбора этой точки, функция непрерывна на всей числовой оси.

***Теорема2 .*** Сумма, разность, произведение, отношение ( если знаменатель отличен от нуля) двух непрерывных функций есть функция непрерывная.

*Доказательство:* Доказательство вытекает из соответствующих теорем о пределах.

Если функции непрерывны в точке , то функции будет непрерывна в точке , так как

Использовали теорему, предел произведения равен произведению пределов.

***Теорема3 .( о непрерывности сложной функции)***

Если функция непрерывна в точке и , а функция непрерывна в точке , то функции будет непрерывна в точке , т.е. непрерывная функция от непрерывной функции есть функция непрерывная.

*Доказательство:*

***Свойства непрерывных функций, непрерывных на отрезке***

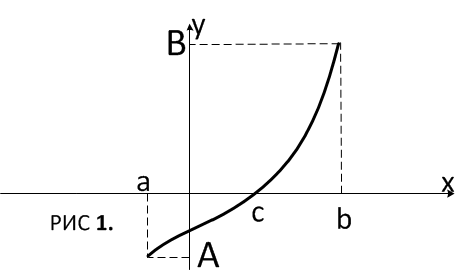
**Определение 5.** Функция называется непрерывной на отрезке , если она непрерывна во всех внутренних точках отрезка, а в концевых точках существуют два односторонних предела

Функции, непрерывные на отрезке , обладают целым рядом свойств, которые перечислим в виде следующих теорем.

***Теорема1 .( об обращении в нуль функции, непрерывной на отрезке)***

Если функция непрерывна на отрезке и концах отрезка принимает значения различных знаков, то найдется **хотя бы одна точка**

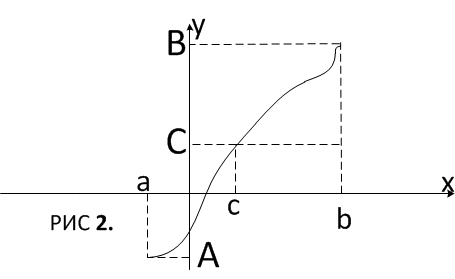
такая, что , т.е. непрерывная функция не может изменить знак не пройдя через нуль.



Геометрическая интерпретация: если функция непрерывна на отрезке и , то найдется **хотя бы одна точка**  в которой график функции пересекает ось .

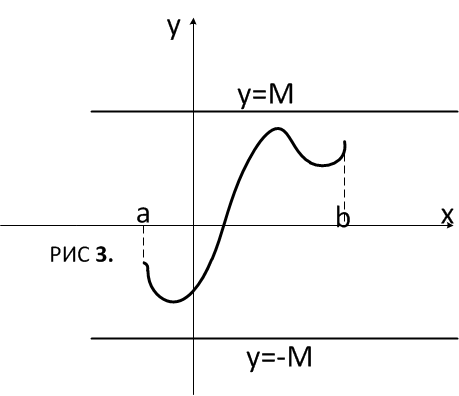
***Теорема2.( о промежуточном значении функции, непрерывной на отрезке)***

Если функция непрерывна на отрезке и область изменения функции есть некоторый отрезок оси , то для найдется **хотя бы одна точка**  такая, что , т.е. непрерывная функция должна пройти через все свои промежуточные значения или заполнить сплошь промежуток своего изменения.

Геометрическая интерпретация: если функция непрерывна на отрезке и область изменения функции есть некоторый отрезок оси , то для каждой ординаты из множества значений функции обязательно найдется **хотя бы одна точка** абсциссы изобласти определения функции.

***Теорема3 .( об ограниченности функции, непрерывной на отрезке)***

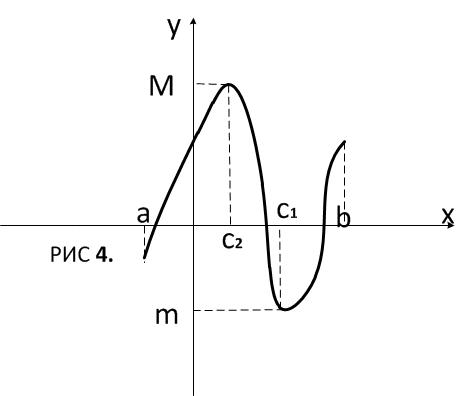
Если функция непрерывна на отрезке , то она на этом отрезке ограничена, т.е. .



Геометрическая интерпретация: если функция непрерывна на отрезке , то график этой функции целиком лежит в полосе от до .

***Теорема4 .( о наибольшем и наименьшем значении функции, непрерывной на отрезке)***

Если функция непрерывна на отрезке , то **хотя бы в одной точке**  функция достигает своего наибольшего и **хотя бы в одной точке**  функция достигает своего наименьшего значений

**

Геометрическая интерпретация: если функция непрерывна на отрезке , то

график этой функции целиком лежит в полосе от до .

***Точки разрыва и их классификация***

Если функция определена в окрестности точки , но условия непрерывности в точке нарушены, то в этой точке функция имеет разрыв.

Вспомним определение непрерывности функции в точке .

**Определение 1.** Функция называется непрерывной

в точке , если

1.функция определена в точке ,

2. существует конечный предел при

3. предел существует и равен значению функции в точке

**Определение 4.** Функция называется непрерывной в окрестности точки , если она непрерывна в каждой точке окрестности.

Если не выполняется хотя бы одно условие из определения непрерывности функции в точке, то такая точка называется точкой разрыва функции .

Например, если:

1.функция не определена в точке ,

2. не существует конечного предела при

3. предел существует, но не равен значению функции в точке

Существует три вида точек разрыва:

1. *Устранимая точка разрыва*

2*. Точка разрыва 1-го рода*

3. *Точка разрыва 2-го рода*

**И только такие названия!!!**

**Определение 6.** Если существует конечный предел функции

при слева и существует конечный предел функции

при справа, и они равны, но в самой точке функция либо не определена, либо , если определена, то не равна пределам функции слева и справа, тогда точка *устранимая точка разрыва.*

т.е.

то точка *устранимая точка разрыва.*

**Пример1**: Исследовать на непрерывность функцию , найти точки разрыва, указать характер разрыва функции, доопределить функцию, если это возможно.

Решение: Функция не определена в точке и поэтому исследуем функцию на разрыв в этой точке. По первому замечательному пределу

Следовательно, точка *устранимая точка разрыва.*

Доопределим функцию для устранения разрыва функции. Положим , функция примет вид

,

Данная функция непрерывна в точке , разрыв в точке устранен.

**Определение 7.** Если существует конечный предел функции

при слева и существует конечный предел функции

при справа, и они не равны друг другу, то точка *точка разрыва 1-го рода.*

т.е.

то точка *точка разрыва 1-го рода.*

**Пример 2:** Исследовать на непрерывность функцию , найти точки разрыва, указать характер разрыва функции

Решение: Рассмотрим точку раскроем модуль и вычислим пределы слева и справа при

Существуют конечные пределы справа и слева не равные друг другу, следовательно, точка  *точка разрыва 1-го рода.*

**Определение 8.** Если хотя бы один из односторонних пределов функции при не существует или равен бесконечности, то точка *точка разрыва 2-го рода.*

т.е.

или

то точка *точка разрыва 2-го рода.*

**Пример 3:** Исследовать на непрерывность функцию , найти точки разрыва, указать характер разрыва функции

Решение: Функция не определена в точке и поэтому исследуем функцию на разрыв в этой точке.

Вычислим пределы слева и справа при

один из односторонних пределов функции при равен бесконечности, то точка *точка разрыва 2-го рода.*