**Предел функции**

*Предел функции*

Зададим некоторую функцию и рассмотрим поведение этой функции при изменении , в частности, при и т.д.

Когда и число, то будем предполагать, что функция определена в окрестности точки , за исключением, быть может, самой точки .

**Определение 1.** Число называется пределом функции при , если

для любого сколь угодно малого эпсилон больше нуля найдется дельта, функция от эпсилон , больше нуля, такое что из условия, следует условие для функции

или запишем определение на языке

или, используя, определение окрестности точки, получим:

Геометрическая интерпретация :

Для любой эпсилон окрестности предела найдется дельта окрестность предельной точки , такая что как только попадает в дельта окрестность предельной точки , так функция попадает в эпсилон окрестность предела .

Аналогично можно дать определение предела при предположив, что функция определена при достаточно больших значениях аргумента

**Определение 2.** Число называется пределом функции при , если

Геометрическая интерпретация :

*Односторонние пределы функции*

Введем понятие одностороннего предела функции , предположив при этом , что функция определена слева ( или справа) от точки , то есть в интервале ( или в интервале )

**Определение 3.** Число называется левосторонним пределом функции при , если

**Определение 4.** Число называется правосторонним пределом функции при , если

*Пример1:Найти левосторонний и правосторонний пределы функции*

Данная функция имеет *левосторонний при и правосторонний при пределы, но не имеет предела при*

*Теорема :* Если функция имеет в точке оба односторонних предела( справа и слева) и эти пределы равны числу , то функция в точке имеет предел, равный .

Отметим, что справедливо и обратное утверждение:

Из существования у функции предела в точке , равного числу , следует существование в этой точке обоих односторонних пределов , также равных числу .

*Свойства функции, имеющих предел*

***Теорема 1****( об ограниченности функции, имеющей предел):* Если

то функция ограничена в окрестности точки .

*Доказательство:*

Обозначим через , тогда

то есть функция ограничена в окрестности точки .

***Теорема 2****( о сохранении знака предела):* Если

то в некоторой окрестности предельной точки функция сохраняет знак предела, т.е. знак числа

*Доказательство:*

Возьмём , тогда имеют знак совпадающий со знаком числа

Для этого

функция одного знака с числом в некоторой окрестности предельной точки .

***Теорема 3****( о единстве предела):* Если у функции

то этот предел единственный.

*Доказательство( методом от противного):* Предположим, что у функции существует два предела

при различных между собой, т.е.

В силу определения пределов это означает, что

Обозначим через тогда при будут выполняться оба неравенства:

где любое число, например возьмем

получили противоречие, значит наше предположение было не верно, а

***Теорема 4****( о пределе промежуточной функции):* Если в окрестности точки

определены три функции , причем выполняется соотношение и

*Доказательство:* из существования пределов у функций

Обозначим через тогда при будут выполняться оба неравенства:

*Замечательные пределы*

**Первый замечательный предел:**

**Второй замечательный предел:**

*Доказательство:* нам известно

Пусть

, где целое положительное число

Найдем пределы последовательностей, стоящих по краям неравенства.

Тогда по теореме о пределе промежуточной функции

Пусть теперь , введем переменную