**Предел функции**

*Предел функции*

Зададим некоторую функцию $f\left(x\right)$ и рассмотрим поведение этой функции при изменении $x$, в частности, при $x\rightarrow a, x\rightarrow \infty , x\rightarrow +\infty , x\rightarrow -\infty $ и т.д.

Когда $x\rightarrow a$ и $a-$ число, то будем предполагать, что функция $f\left(x\right)$ определена в окрестности точки $a$, за исключением, быть может, самой точки $a$.

**Определение 1.** Число $A$ называется пределом функции $f\left(x\right)$ при $x\rightarrow a$ , если

для любого сколь угодно малого эпсилон больше нуля найдется дельта, функция от эпсилон , больше нуля, такое что из условия, $0< \left|x-a\right|<δ$ следует условие для функции$ \left|f\left(x\right)-A\right|<ε$

или запишем определение на языке $"ε-δ"$

$$$$

$$$$

 или, используя, определение окрестности точки, получим:

$∀ U\_{ε}\left(A\right) ∃ \dot{U}\_{δ}\left(a\right) : ∀x\in \dot{U}\_{δ}\left(a\right) =>f\left(x\right)\in U\_{ε}\left(A\right)$

Геометрическая интерпретация :

Для любой эпсилон окрестности предела $A$ найдется дельта окрестность предельной точки $a$, такая что как только $x$ попадает в дельта окрестность предельной точки $a$, так функция $f\left(x\right)$ попадает в эпсилон окрестность предела $A$.

Аналогично можно дать определение предела при $x\rightarrow \infty , x\rightarrow +\infty , x\rightarrow -\infty ,$ предположив, что функция $f\left(x\right)$ определена при достаточно больших значениях аргумента

**Определение 2.** Число $A$ называется пределом функции $f\left(x\right)$ при $x\rightarrow \infty $ , если

$$$$

$$$$

Геометрическая интерпретация :

*Односторонние пределы функции*

Введем понятие одностороннего предела функции $f\left(x\right)$, предположив при этом , что функция $f\left(x\right)$ определена слева ( или справа) от точки $a$, то есть в интервале $\left(x,a\right)$ ( или в интервале $\left(a,x\right)$ )

**Определение 3.** Число $A$ называется левосторонним пределом функции $f\left(x\right)$ при $x\rightarrow a-0 или x\rightarrow a^{-} $ , если

$$$$

$$$$

**Определение 4.** Число $A$ называется правосторонним пределом функции $f\left(x\right)$ при $x\rightarrow a+0 или x\rightarrow + $ , если

$$$$

$$$$

*Пример1:Найти левосторонний и правосторонний пределы функции* $f\left(x\right)$

$$f\left(x\right)=signx=\left\{\begin{matrix}1, x>0\\0, x=0\\-1, x<0\end{matrix}\right.$$

Данная функция имеет *левосторонний при* $x\rightarrow 0+0 $ *и правосторонний при* $x\rightarrow 0-0 $*пределы, но не имеет предела при* $x\rightarrow 0 .$

$$\lim\_{x\to 0-0}f\left(x\right)=-1 $$

$$\lim\_{x\to 0+0}f\left(x\right)=1 $$

$$ ∄ \lim\_{x\to 0}f\left(x\right)=-1 $$

*Теорема :* Если функция $f\left(x\right)$ имеет в точке $a$ оба односторонних предела( справа и слева) и эти пределы равны числу $A$ , то функция $f\left(x\right)$ в точке $a$ имеет предел, равный $A$ .

Отметим, что справедливо и обратное утверждение:

Из существования у функции $f\left(x\right)$ предела в точке $a$, равного числу $A$ , следует существование в этой точке обоих односторонних пределов , также равных числу $A$ .

$$∃\lim\_{x\to a+0}f\left(x\right)=A и ∃\lim\_{x\to a-0}f\left(x\right)=A <=> ∃ \lim\_{x\to a}f\left(x\right)=A$$

*Свойства функции, имеющих предел*

***Теорема 1****( об ограниченности функции, имеющей предел):* Если

$$∃ \lim\_{x\to a}f\left(x\right)=A,$$

то функция $f\left(x\right)$ ограничена в окрестности точки $a$.

*Доказательство:*

$$∃ \lim\_{x\to a}f\left(x\right)=A => $$

$$∀ ε>0 ∃ δ=δ\left(ε\right)>0 : ∀x 0< \left|x-a\right|<δ => \left|f\left(x\right)-A\right|<ε =>$$

$$\left|f\left(x\right)-A\right|<ε => -ε<f\left(x\right)-A<ε => A-ε<f\left(x\right)<A+ε $$

Обозначим через $M=max\left\{\left|A-ε\right|,\left|A+ε\right|\right\}$ , тогда

$$-M<f\left(x\right)<M или \left|f\left(x\right)\right|<M $$

то есть функция $f\left(x\right)$ ограничена в окрестности точки $a$.

***Теорема 2****( о сохранении знака предела):* Если

$$∃ \lim\_{x\to a}f\left(x\right)=A\ne 0,$$

то в некоторой окрестности предельной точки$ a$ функция $f\left(x\right)$ сохраняет знак предела, т.е. знак числа $A.$

*Доказательство:*

$$∃ \lim\_{x\to a}f\left(x\right)=A => $$

$$∀ ε>0 ∃ δ=δ\left(ε\right)>0 : ∀x 0< \left|x-a\right|<δ => \left|f\left(x\right)-A\right|<ε =>$$

$$\left|f\left(x\right)-A\right|<ε => -ε<f\left(x\right)-A<ε => A-ε<f\left(x\right)<A+ε $$

Возьмём $ε=\frac{\left|A\right|}{2}$ , тогда $A-ε и A+ε$ имеют знак совпадающий со знаком числа $A$

Для этого

$$ ε=\frac{\left|A\right|}{2}>0 ∃ δ=δ\left(ε\right)>0 : ∀x 0< \left|x-a\right|<δ => \left|f\left(x\right)-A\right|<\frac{\left|A\right|}{2} =>$$

$$=> A-\frac{\left|A\right|}{2}<f\left(x\right)<A+\frac{\left|A\right|}{2} =>$$

функция $f\left(x\right)$ одного знака с числом $A$ в некоторой окрестности предельной точки$ a$ .

***Теорема 3****( о единстве предела):* Если у функции $f\left(x\right)$

$$∃ \lim\_{x\to a}f\left(x\right)=A,$$

то этот предел единственный.

*Доказательство( методом от противного):* Предположим, что у функции $f\left(x\right)$ существует два предела

при $x\rightarrow a, $различных между собой, т.е.

$$∃ \lim\_{x\to a}f\left(x\right)=A и ∃ \lim\_{x\to a}f\left(x\right)=B, причем B\ne A $$

В силу определения пределов это означает, что

$$∀ \frac{ε}{2}>0 ∃ δ\_{1}=δ\_{1}\left(ε\right)>0 : ∀x 0< \left|x-a\right|<δ\_{1} => \left|f\left(x\right)-A\right|<\frac{ε}{2} =>$$

$$∀ \frac{ε}{2}>0 ∃ δ\_{2}=δ\_{2}\left(ε\right)>0 : ∀x 0< \left|x-a\right|<δ\_{2} => \left|f\left(x\right)-B\right|<\frac{ε}{2} =>$$

Обозначим через $δ=min\left(δ\_{1},δ\_{2}\right)$ тогда при $0< \left|x-a\right|<δ$ будут выполняться оба неравенства: $\left|f\left(x\right)-A\right|<\frac{ε}{2} и \left|f\left(x\right)-B\right|<\frac{ε}{2 } => $

$$\left|A-B\right|=\left|f\left(x\right)-A+B-f\left(x\right)\right|\leq \left|f\left(x\right)-A\right|+\left|f\left(x\right)-B\right|<\frac{ε}{2}+\frac{ε}{2}= ε$$

$$=>\left|A-B\right|<ε$$

где $ε-$ любое число, например возьмем $ε=\frac{\left|A-B\right|}{2}=> \left|A-B\right|<\frac{\left|A-B\right|}{2}, $

получили противоречие, значит наше предположение было не верно, а

$$∃ единственный \lim\_{x\to a}f\left(x\right)=A$$

***Теорема 4****( о пределе промежуточной функции):* Если в окрестности точки $a$

определены три функции $u\left(x\right), f\left(x\right) , v\left(x\right)$ , причем выполняется соотношение $u\left(x\right)\leq f\left(x\right)\leq v\left(x\right)$ и

$$∃ \lim\_{x\to a}u\left(x\right)=A и ∃ \lim\_{x\to a}v\left(x\right)=A=>∃ \lim\_{x\to a}f\left(x\right)=A $$

*Доказательство:* из существования пределов у функций $u\left(x\right) и v\left(x\right)=> $

$$∀ε>0 ∃ δ\_{1}=δ\_{1}\left(ε\right)>0 : ∀x 0< \left|x-a\right|<δ\_{1} => \left|u\left(x\right)-A\right|<ε =>$$

$$∀ε>0 ∃ δ\_{2}=δ\_{2}\left(ε\right)>0 : ∀x 0< \left|x-a\right|<δ\_{2} => \left|v\left(x\right)-B\right|<ε =>$$

Обозначим через $δ=min\left(δ\_{1},δ\_{2}\right)$ тогда при $0< \left|x-a\right|<δ$ будут выполняться оба неравенства: $\left|u\left(x\right)-A\right|<ε и \left|v\left(x\right)-B\right|<ε => $

$$A-ε<u\left(x\right)<A+ε и A-ε<v\left(x\right)<A+ε => $$

$$A-ε<u\left(x\right)\leq f\left(x\right)\leq v\left(x\right)<A+ε => A-ε<f\left(x\right)<A+ε =>$$

$$∃ \lim\_{x\to a}f\left(x\right)=A $$

*Замечательные пределы*

**Первый замечательный предел:**

$$\lim\_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1 $$

**Второй замечательный предел:**

$$\lim\_{x\to +\infty }\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e $$

*Доказательство:* нам известно

$$\lim\_{n\to +\infty }\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e $$

Пусть $x\rightarrow +\infty , $

 $n<x<n+1$, где целое положительное число

 $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{n} => 1+ \frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{n} => $

$ \left(1+ \frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} =>$

Найдем пределы последовательностей, стоящих по краям неравенства.

$$\lim\_{n\to \infty }\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim\_{n\to \infty }\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}∙\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=e$$

$$\lim\_{n\to \infty }\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\_{n\to \infty }\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}∙\left(1+\frac{1}{n}\right)=e$$

Тогда по теореме о пределе промежуточной функции

$$$$

Пусть теперь $x\rightarrow -\infty $, введем переменную $t=-\left(x+1\right) при x\rightarrow -\infty , t\rightarrow \infty , $

$$\lim\_{x\to -\infty }\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}= \lim\_{t\to +\infty }\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-\left(t+1\right)} =\lim\_{t\to +\infty }\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e =>$$

$$$$