**Функции нескольких переменных.**

***4. Экстремум функции нескольких переменных****.*

**Определение.** Точка трех ( двух)-мерного пространства

( ) называется точкой локального максимума (или минимума) функции нескольких переменных , если существует такая её проколотая окрестность, что для всех точек, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство

**Определение.** Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума функции.

**Определение.** Значение функции в точке локального экстремума называется локальным экстремумом функции.

**Теорема 3.** (Необходимое условие экстремума ). В точке локального экстремума все частные производные первого порядка равны нулю, если они существуют.

Следствие. Если точка является точкой локального экстремума дифференцируемой в ней функции, то .

**Определение.** Точка, в которой все частные производные функции обращаются в нуль или не существуют, называется критической точкой.

**Определение.** Точка, в которой все частные производные функции обращаются в нуль, называется стационарной точкой.

**Замечание**. Стационарная точка может быть точкой локального экстремума, а может и не быть ею. Рассмотрим функцию двух переменных

 (гиперболический параболоид). Точка является стационарной, т. к.

Рассмотрим произвольную окрестность точки . Возьмем два сечения окрестности плоскостями Oxz и Oyz . В сечении первой плоскостью Oxz ( или ) функция двух переменных предстанет параболой , ветви которой направлены вверх и точка является минимумом

В сечении плоскостью Oyz ( или ) функция двух переменных предстанет параболой , ветви которой направлены вниз и точка является максимумом

*Следовательно,*  для всех точек, принадлежащих окрестности точки ни одно из неравенств

не выполняется. И точка не является ни максимумом , ни минимумом функции двух переменных . Точки указанного типа называют точками минимакса.

Пусть функция непрерывна вместе с частными производными до второго порядка включительно в окрестности стационарной точки. Определим условия, при которых стационарная точка будет являться точкой локального экстремума функции .

 Формула Тейлора для функции двух переменных имеет вид

Здесь

Учитывая, что точка ( стационарная точка

( , из формулы Тейлора получаем, что знак разности определяется знаком выражения стоящего в скобках.

Для определения знака разности преобразуем последнее выражение, выделяя полный квадрат

 (4.2)

Замечание: проверить правильность формулы (4.2) раскрытием скобок.

*Учитывая, что дифференциал второго порядка для функции двух переменных определяется формулой* ,

*которая имеет ту же структуру, что и выражение в скобках*(4.1)*, можно сказать, что знак выражения совпадает со знаком дифференциала второго порядка.*

Дифференциалу второго порядка можно поставить в соответствие матрицу A

главные миноры, которой и

Тогда выражение (4.2) можно представить в более компактной записи

Так как по условию частные производные второго порядка функции непрерывны, то знак выражения

будет иметь место и в некоторой окрестности точки (

или совпадать со знаком выражения (4.2).

При этом получаем, что

**1.** если , то

для всех точек , принадлежащих проколотой окрестности точки и, следовательно, точка - точка локального минимума.

**2.** если , то

для всех точек , принадлежащих проколотой окрестности точки и, следовательно, точка - точка локального максимума.

**3.** в случаях знак выражения непостоянен и, следовательно, точка - точка не является ни минимум, ни максимумом .

**4.** если , точка - точка может быть или не быть точкой минимума или максимума. В этом случае требуются дополнительные исследования.

Для функции трех переменных , учитывая, что точка ( стационарная точка (, из формулы Тейлора получаем, что знак разности определяется знаком выражения стоящего в скобках.

Здесь формула Тейлора для функции трех переменных записана

Для определения знака разности преобразуем последнее выражение, выделяя полные квадраты

*Учитывая, что дифференциал второго порядка для функции трех переменных определяется формулой*

*которая имеет ту же структуру, что и выражение в скобках*(4.3)*, можно сказать, что знак выражения совпадает со знаком дифференциала второго порядка.*

Полному второму дифференциалу функции соответствует матрица

Главные миноры, которой

Тогда выражение (4.3) можно представить в более компактной записи

Так как по условию частные производные второго порядка функции непрерывны, то знак выражения

будет иметь место и в некоторой окрестности точки (

или совпадать со знаком выражения (4.4).

При этом получаем, что

 **1.** если , то для всех точек , принадлежащих проколотой окрестности точки и, следовательно, точка - точка локального минимума.

**2.** если , то

для всех точек , принадлежащих проколотой окрестности точки и, следовательно, точка - точка локального максимума.

**3.** в случаях знак выражения непостоянен и, следовательно, точка - точка не является ни минимум, ни максимумом .

**4.** если , точка - точка может быть или не быть точкой минимума или максимума. В этом случае требуются дополнительные исследования.

Объединяя все выше сказанное, сформулируем теорему

**ВЫУЧИТЬ!!!**

**Теорема 4.** (Достаточное условие экстремума ).

Пусть функция непрерывна вместе с частными производными до второго порядка включительно в окрестности стационарной точки и главные миноры матрицы A , составленной из частных производных второго порядка, соответствующие полному дифференциалу второго порядка в этой точке определены, то

**1.** если все главные миноры больше нуля, точка - точка локального минимума.

**2.** если все главные миноры чередуют знак, начиная с отрицательного , точка - точка локального максимума.

**3.** в других случаях , при условии, что главные миноры отличны от нуля, точка - точка не является ни минимум, ни максимумом .

**4.** если хоть один главный минор равен нулю, точка - точка может быть или не быть точкой минимума или максимума. В этом случае требуются дополнительные исследования.

***План исследования на экстремум функций двух переменных***

**1.** Используя необходимые условия экстремума, находим стационарные точки :

Решением системы являются стационарные точки

**2.** Вычисляем частные производные второго порядка в каждой из найденных стационарных точек . Выражение для дифференциала второго порядка функции имеет вид:

 Составляем матрицу ,

с главными минорами и

**3.** Определяем, является ли стационарная точка точкой максимума или минимума функции

а) если , то - точка локального минимума.

б) если , то - точка локального максимума.

в) в остальных случаях стационарная точка - не является точкой экстремума, если .

г) если , то необходимы дополнительные исследования.

Пример 6. Найти и исследовать точки экстремума функции

**1.** Используя необходимые условия экстремума, находим стационарные точки :

 или

Система имеет два решения:

Имеем две стационарные точки, необходимо проверить являются они точками локального экстремума или нет.

**2.** Вычисляем частные производные второго порядка.

Выражение для второго дифференциала функции имеет вид:

Составляем матрицу

Матрица A, соответствующая второму дифференциалу, зависит от точки .

**3.** Определяем, являются ли стационарные точки

 точками максимума или минимума функции . Для этого подставляем координаты стационарных точек в выражение для .

Для первой стационарной точки получим

с главными минорами и

вывод: стационарная точка- не является точкой экстремума.

Для второй стационарной точки получим

с главными минорами и

вывод: стационарная точка- точка локального минимума.

Ответ: функция имеет одну точку экстремума, точка- точка локального минимума.

***План исследования на экстремум функций трех переменных u=f(x,y,z).***

**1.** Используя необходимые условия экстремума, находим стационарные точки :

Решением системы являются стационарные точки

**2.** Вычисляем частные производные второго порядка в каждой из найденных стационарных точек . Выражение для дифференциала второго порядка функции имеет вид:

Составляем матрицу

с главными минорами

 и и

**3.** Определяем является ли стационарная точка точкой максимума или минимума функции u=f(x,y,z).

а) если , то - точка локального минимума.

б) если , то - точка локального максимума.

в) в остальных случаях стационарная точка - не является точкой экстремума, если .

г) если , то необходимы дополнительные исследования.

Пример 7. Найти и исследовать точки экстремума функции

**1.** Используя необходимые условия экстремума, находим стационарные точки :

Решением системы является стационарная точка

**2.** Вычисляем частные производные второго порядка в найденной стационарной точке

 .

Выражение для второго дифференциала функции имеет вид:

или

Составляем матрицу

главными минорами, которой являются

 и и

**3.** Определяем, является ли стационарная точка точкой локального экстремума ( точкой максимума или минимума) функции u=f(x,y,z).

Так как , то - точка локального минимума.

Ответ: точка является точкой минимума функции .