**Функции нескольких переменных.**

***3. Дифференцирование функций нескольких переменных****.*

**Определение**. *Частным приращением* функции по переменной называется приращение

**Определение.**  *Частной производной первого порядка* функции

по одной из независимый переменный называется предел частного приращения функции по этой переменной к приращению переменной, когда приращение переменной стремится к 0.

Частную производную первого порядка функции

по переменный обозначают:

Функция трех переменных имеет три частные производные первого порядка,

по x

по y

по z

Функция двух переменных имеет две частные производные первого порядка,

**Определение.** Приращение называется частным приращением данной функции по переменной . Приращение

называется частным приращением данной функции по переменной .

Из определения частной производной первого порядка функции

видно, что при дифференцировании функции нескольких переменных по одной из них, все остальные переменные следует считать постоянными и, следовательно, можно пользоваться известными правилами и формулами дифференцирования функции одной переменной.

Пример 2.

**a)** Найти все частные производные первого порядка функции двух переменных

Решение: При вычислении частной производной по переменной переменную считаем константой

при вычислении частной производной по переменной переменную считаем константой

**б)** Вычислить все частные производные первого порядка функции трех переменных

Решение: Аналогично предыдущему примеру из пункта а), при вычислении частной производной по переменной , переменные и считаем константами.

Частная производная вычисляется при фиксированных и z , т.е. и

Частная производная берется при фиксированных и , т.е. и

***Геометрический смысл частных производных для функций двух переменных.***

Если через Р( проведем плоскостью ( плоскость параллельную плоскости XOZ), то она пересечёт поверхность, соответствующую функции , по некоторой кривой . Производная , найденная в точке Р(, будет равна тангенсу угла (наклона касательной, к кривой в точке Р(вому коэффициенту (k) касательной, т.е. tg(=k. (Рис. 2)



исунок

Если через Р( построить плоскостью ( плоскость параллельную плоскости YOZ), то она пересечёт поверхность, соответствующую функции z = f (x, y), по некоторой кривой . Производная , найденная в точке Р(, будет равна тангенсу угла (наклона касательной, к кривой в точке Р(вому коэффициенту (k) касательной, т.е. tg(=k. (Рис. 3)

Предположим, что функция нескольких переменных имеет частные производные первого порядка во всех точках области определения D. Эти производные являются функциями нескольких переменных в области D и они тоже могут иметь частные производные первого порядка.

**Определение.** Частные производные первого порядка от частных производных первого порядка функции нескольких переменных называются *частными производными второго порядка функции нескольких переменных* и обозначаются

или .

Аналогично определяются частные производные более высокого порядка.

**Определение.** Частная производная высшего порядка, взятая по разным переменным, называется *смешанной производной* и обозначается (частная производная второго порядка) или или (частные производные третьего порядка)

Например, функция двух переменных имеет четыре частные производные второго порядка

; транскрипция «дэ два эф по дэ икс в квадрате»

; транскрипция «дэ два эф по дэ икс по дэ игрек»

; транскрипция «дэ два эф по дэ игрек по дэ икс »

; транскрипция «дэ два эф по дэ игрек в квадрате»

а функция трех переменных имеет уже девять частных производных второго порядка.

В общем случае, смешанные производные не равны друг другу, например , поэтому порядок написания переменной в знаменателе частной производной имеет важное значение.

Имеет место теорема о равенстве смешанных производных. **ВЫУЧИТЬ!!!**

**Теорема. 1.** Если функция определена и непрерывна в окрестности точки Р вместе со своими частными производными до k-ого порядка включительно, то смешанные производные функции до k-ого порядка включительно в этой точке, не зависят от порядка дифференцирования.

Например, если функция непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в окрестности точки (, то .

Для функции двух переменных непрерывной вместе со своими частными производными до третьего порядка включительно в окрестности точки (

.

Пример 3.

**а)** Найти смешанные производные второго порядка функции

и проверить их равенство.

Решение: Функция является непрерывной по переменным x и y. Найдем вторые смешанные производные

то есть производные .

**б)** Найти смешанные производные второго порядка функции и проверить их равенство.

как видно производные равны .

**Определение***. Полным приращением* функции называется приращение

*полным приращением* функции называется приращение

**Определение.** Функция называется дифференцируемой в точке, если её полное приращение может быть представлено в виде суммы двух слагаемых: выражения, линейного относительно приращений и величины бесконечно малой высшего порядка по сравнению с

полное приращение может быть представлено в виде суммы двух слагаемых:

**Теорема 2.** Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство: По условию теоремы функция u= f( дифференцируема в точке

Если функция дифференцируемая в точке, то она имеет в этой точке частные производные первого порядка

аналогично, ,

тогда полное приращение может быть представлено в виде суммы двух слагаемых

**Определение.** *Полным дифференциалом функции трех переменных*  называется линейная часть её полного приращения, относительно приращений всех её переменных и обозначается du

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращением .

**Определение.** *Частными дифференциалами* по переменной x ( или y, или z) называется линейная часть её полного приращения, линейная относительно приращения по переменной

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращением .

Для функций двух переменных полный дифференциал равен

**Определение.** Дифференциалом второго порядка от функции нескольких переменных называется полный дифференциал от ее полного дифференциала первого порядка ;

аналогично определяются дифференциалы более высокого порядка

.

Если функция непрерывна вместе со своими частными производными, то дифференциалы высших порядков определяются символически формулой, коэффициенты которой совпадают с коэффициентами формулы бинома Ньютона:

Для n=2 имеем дифференциал второго порядка для функция

Для n=3 имеем дифференциал третьего порядка для функция

**Определение.** Пусть функция определена в окрестности точке ( . Пусть её аргументы являются функциями от переменных , (т.е. и определены в некоторой окрестности точки (, причем

, тогда в окрестности точки ( определена *сложная функция*

Замечание 1. Функция может быть функцией от любого количества переменных.

Замечание2. Аргументы функции могут быть функциями от любого количества переменных.

Например, пусть функция двух переменных с аргументами, которые являются также функциями двух переменных

, тогда имеем сложную функцию

или пусть функция трех переменных с аргументами, которые являются также функциями от переменной

, тогда имеем сложную функцию

**Теорема 3.** Пусть функция дифференцируема в точке ( , её аргументы являются функциями от переменных , (т.е. и дифференцируемы в точке (, причем , тогда сложная функция

от переменных дифференцируема в точке

( и её частные производные первого порядка и определяются формулами

Пример 4.

**а)** найдите первые частные производные по функции

при условии, что

**б)** найдите первую производную по функции при условии, что

**в)** найдите первую производную по функции при условии, что

На этом примере хорошо видно, что полная производная функции по переменной и частная производная этой же функции по той же переменной отличаются друг от друга.

Пусть функция дифференцируема в точке ( , её аргументы являются функциями от переменных ,

(т.е. и дифференцируемы в точке (, причем , и по теореме 3 сложная функция

от переменных дифференцируема

в точке ( и имеет частные производные

Найдем дифференциал сложной функции .

Полный дифференциал функции двух переменных равен

Так как аргументы функции являются также непрерывными функциями двух переменных(т.е. , то учитывая, что

дифференциал сложной функции будет равен

Следовательно, полный дифференциал функции двух переменных выражается формулой формальная запись, которой в обоих случаях одинакова. Это означает, что *форма первого полного дифференциала инвариантна относительно замены переменных.*

**Формула Тейлора для функции двух ( трех) переменных**

Пусть в окрестности точки( функция имеет непрерывные частные производные до порядка включительно, тогда для любой точки принадлежащей окрестности точки ( справедлива формула Тейлора n–го порядка

или

Для функции непрерывной в месте со своими частными производными до порядка в окрестности точки формула Тейлора в точке принадлежащей окрестности точки имеет вид

Пример 5.

Разложить функцию в окрестности точки( по формуле Тейлора до 2 порядка

Ищем первые и вторые частные производные функции

Первые частные производные

Вторые частные производные

Вторые частные производные в точке(

формула Тейлора –го порядка для функции

в окрестности точки( имеет вид

Ответ: