**Функции нескольких переменных.**

***1. Основные понятия***.

Исследование функции нескольких переменных проведем на примерах функций двух и трех переменных, так как все данные определения и полученные результаты справедливы для функций n переменных.

**Определение.** Если в пространстве каждой точке P=, принадлежащей некоторому множеству D, ставится в соответствие единственное действительное значение z , то говорят, что на множестве D задана функция двух переменных и обозначают .

Областью определения функции является множество . Графиком функции двух переменных будет поверхность в .

Например, графиком функции будет эллиптический параболоид (рис.1)



 **Определение.** Функция трех переменных каждой точке ⊂ , принадлежащей некоторому множеству D, ставит в соответствие единственное действительное значение u , её обозначают

 , или ,

 Областью определения функции трех переменных u=f(x,y,z) является множество трехмерного пространства . График функции лежит в четырёхмерном пространстве, представить его затруднительно.

В пространстве расстояние между двумя точками

 определяется следующим образом

 .

В пространстве расстояние между двумя точками

 определяет функция

 .

**Определение.** - окрестностью точки трехмерного пространства называется множество точек таких, что и обозначается .

**Определение.** Проколотой - окрестностью точки трехмерного пространства называется множество точек таких, что и обозначается .

**Определение.** Число А называется пределом функции ) при стремлении точки, если для

или

Как видим, понятие предела для функции многих переменных такое же, как и для функции одной переменной.

Но существует и небольшое отличие:

Если в (на прямой) мы можем стремится к точке двумя способами, слева и справа, то в ( на плоскости) и в ( в пространстве) способов стремится к точке становится бесконечно много.

Для существования предела мы должны показать, что получаемый результат( предел) не зависит от способа подхода к предельной точке. Если при различных подходах к предельной точке получаем разные значения предела функции, то это является доказательством того, что предел функции не существует.

Иногда встречаются задачи, в которых необходимо вычислить предел функции двух( или трех) переменных только по одной заданной линии подхода к предельной точке. И если не существует общего предела, то предел по какому-нибудь частному направлению может существовать.

Рассмотрим функцию и попробуем найти предел при стремлении к началу координат, к точке

Вывод: предела данной функции при стремление к точке не существует.

Такой же вывод могли получить, если бы перешли к полярным координатам, тогда вместо стремления двух переменных у нас будет одно стремление

И видно, что предел завит от угла, от пути подхода к предельной точке .

Рассмотрим функцию и попробуем найти предел при стремлении к началу координат, к точке .

Перейдем к полярным координатам

Предел существует и не меняет значения при произвольном способе подхода к предельной точке .

***2. Непрерывность функций нескольких переменных.***

**Определение.** Функция u= f( называется непрерывной

в точке , если

1.функция u= определена в точке ,

2. существует конечный предела при

3. предел существует и равен значению функции в точке

**Определение.** Функция u= f( называется непрерывной на области D, если она непрерывна в каждой точке области D.

Если не выполняется хотя бы одно условие из определения непрерывности функции в точке, то такая точка называется точкой разрыва функции u=.

Например, если:

1.функция u= не определена в точке ,

2. Не существует конечного предела при

3. предел существует, но не равен значению функции в точке

Функция трех ( двух )переменных может иметь множество точек разрыва, образующих например, одну, две линии разрыва или даже произвольное множество.

Пример 1.

**а)** функция имеет линию разрыва

**б)** функция имеет две линии разрыва,

**в)** если функцию доопределить следующим образом

то останется только одна линия разрыва.

Таким образом, функции многих переменных предполагают огромное разнообразие различных задач.

**ВЫУЧИТЬ!!!**

***3. Дифференцирование функций нескольких переменных****.*

**Определение**. *Частным приращением* функции по переменной называется приращение

**Определение.**  *Частной производной первого порядка* функции

 по одной из независимый переменный называется предел частного приращения функции по этой переменной к приращению переменной, когда приращение переменной стремится к 0.

Частную производную первого порядка функции

 по переменный обозначают:

Функция трех переменных имеет три частные производные первого порядка,

по x

по y

по z

Функция двух переменных имеет две частные производные первого порядка,

**Определение.** Приращение называется частным приращением данной функции по переменной . Приращение

 называется частным приращением данной функции по переменной .

Из определения частной производной первого порядка функции

 видно, что при дифференцировании функции нескольких переменных по одной из них, все остальные переменные следует считать постоянными и, следовательно, можно пользоваться известными правилами и формулами дифференцирования функции одной переменной.

Пример 2.

**a)** Найти все частные производные первого порядка функции двух переменных

Решение: При вычислении частной производной по переменной переменную считаем константой

при вычислении частной производной по переменной переменную считаем константой

**б)** Вычислить все частные производные первого порядка функции трех переменных

Решение: Аналогично предыдущему примеру из пункта а), при вычислении частной производной по переменной , переменные и считаем константами.

Частная производная вычисляется при фиксированных и z , т.е. и

Частная производная берется при фиксированных и , т.е. и