**Определение предела функции в точке.**

**Запись определение предела, с использованием математической символики.**

**Геометрическая интерпретация.**

Рассмотрим классическое определение предела (по Коши), которое во многих учебниках носит название $"ε-δ"$ определение предела$\left[1, с.195\right]$. Существование конечного предела А у функции $f\left(x\right)$ при стремлении $x\rightarrow a$ обозначается следующим образом:

$$\lim\_{x\to a}f\left(x\right)=A$$

 или в математической символике представляет собой следующую запись:

$$∀ε>0 ∃δ=δ\left(ε\right)>0 :0<\left|x-a\right|<δ => \left|f\left(x\right)-A\right|<ε$$

 Так как $x стремится к конечному a$, то $x$ находится как можно ближе к $a$, но при этом $x\ne a$ ( $0<\left|x-a\right| )$, размер окрестности определяется величиной дельта $"δ"$.



Аналогично, изображается стремление функции $y=f\left(x\right)$ к конечному пределу А.



Понятно, что эпсилон $\left(ε\right)$ и дельта$ (δ)$ в данном определении предела величины положительные и сколь угодно малые и обозначаются маленькими буквами греческого алфавита.

Рассмотрим односторонние пределы. В этом случаи переменная $x$ стремится к конечному значению $a$ либо только слева, либо только справа. Геометрическая интерпретация выглядит следующим образом:

Стремление справа означает: Стремление слева означает:



Рассмотрим определение предела функции при стремлении переменной $x$ к бесконечности$\left[2, с.126\right].$. Существование конечного предела А у функции $f\left(x\right)$ при стремлении $x\rightarrow a$ обозначается следующим образом:

$$\lim\_{x\to \infty }f\left(x\right)=A$$

 или в математической символике представляет собой следующую запись:

$$∀ε>0 ∃∆=∆\left(ε\right)>0 :\left|x\right|>∆ => \left|f\left(x\right)-A\right|<ε$$

Так как $ x$ стемится к бесконечности, величина дельта $(∆)$ есть сколь угодно большое число и для наглядности в этом случае используем большую букву греческого алфавита. Геометрическая интерпретация выглядит следующим образом:



 функция$ f\left(x\right)$ стремится к конечному пределу А и величина эпсилон$\left(ε\right)$ есть сколь угодно малая (рис.2).

Аналогично рассмотрим определение предела функции при стремлении переменной $x$ к плюс и минус бесконечности. Так как $ x$ стремится к плюс или минус бесконечности, величина дельта $(∆)$ есть сколь угодно большое число и для наглядности в этом случае используем большую букву греческого алфавита. Геометрическая интерпретация выглядит следующим образом:

при стремление$ x\rightarrow +\infty $ и при стремление$ x\rightarrow -\infty $



Рассмотрим определение предела функции равного бесконечности, при стремлении переменной к конечной величине $x\rightarrow a.$ Существование бесконечного предела у функции $f\left(x\right)$ при стремлении $x\rightarrow a$ обозначается следующим образом:

$$\lim\_{x\to a}f\left(x\right)=\infty $$

 или в математической символике представляет собой следующую запись:

$$∀E>0 ∃δ=δ\left(E\right)>0 : 0<\left|f\left(x\right)-A\right|<δ => \left|f\left(x\right)\right|>E$$

Так как $ x$ стемится к конечной величине $a$, величина дельта $(δ)$ есть сколь угодно малая и для наглядности в этом случае используем малую букву греческого алфавита. Предел функции стремится к бесконечности и величина эпсилон $\left(E\right)$ сколь угодно большое число, то обозначаются её большой буквой греческого алфавита. Геометрическая интерпретация выглядит следующим образом:

 

В таблице 1. представлены все возможные варианты предела функции

 $y=f\left(x\right)$ с определением предела через математическую символику и геометрической интерпретацией.

**Таблица 1**.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Предел функции $y=f\left(x\right)$ | Определение предела использующее математическую символику | Геометрическая интерпретация предела функции $y=f\left(x\right)$ |
| 1 | $$\lim\_{x\to a}f\left(x\right)=A$$ | $$∀ε>0 ∃δ=δ\left(ε\right)>0 :$$$$0<\left|x-a\right|<δ => $$$$ \left|f\left(x\right)-A\right|<ε $$ |  |
| 2 | $$\lim\_{x\to a+0}f\left(x\right)=A$$ | $$∀ε>0 ∃δ=δ\left(ε\right)>0 :$$$$0<x-a<δ => $$$$ \left|f\left(x\right)-A\right|<ε $$ |  |
| 3 | $$\lim\_{x\to a-0}f\left(x\right)=A$$ | $$∀ε>0 ∃δ=δ\left(ε\right)>0 :$$$$-δ<x-a<0 => $$$$ \left|f\left(x\right)-A\right|<ε$$ |  |
| 4 | $$\lim\_{x\to -\infty }f\left(x\right)=A$$ | $$∀ε>0 ∃∆=∆\left(ε\right)>0 :$$$$x<-∆ => $$$$ \left|f\left(x\right)-A\right|<ε$$ |  |
| 5 | $$\lim\_{x\to +\infty }f\left(x\right)=A$$ | $$∀ε>0 ∃∆=∆\left(ε\right)>0 :$$$$x>∆ => $$$$ \left|f\left(x\right)-A\right|<ε$$ |  |
| 6 | $$\lim\_{x\to \infty }f\left(x\right)=A$$ | $$∀ε>0 ∃∆=∆\left(ε\right)>0 :$$$$\left|x\right|>∆ => $$$$ \left|f\left(x\right)-A\right|<ε$$ |  |
| 7 | $$\lim\_{x\to a}f\left(x\right)=-\infty $$ | $$∀E>0 ∃δ=δ\left(E\right)>0 :$$$$0<\left|x-a\right|<δ => $$$$ f\left(x\right)<-E$$ |  |
| 8 | $$\lim\_{x\to a+0}f\left(x\right)=-\infty $$ | $$∀E>0 ∃δ=δ\left(E\right)>0 :$$$$0<x-a<δ => $$$$f\left(x\right)<-E $$ |  |
| 9 | $$\lim\_{x\to a-0}f\left(x\right)=-\infty $$ | $$∀E>0 ∃δ=δ\left(E\right)>0 :$$$$-δ<x-a<0 => $$$$ f\left(x\right)<-E$$ |  |
| 10 | $$\lim\_{x\to -\infty }f\left(x\right)=-\infty $$ | $$∀E>0 ∃∆=∆\left(E\right)>0 :$$$$x<-∆ => $$$$ f\left(x\right)<-E$$ |  |
| 11 | $$\lim\_{x\to +\infty }f\left(x\right)=-\infty $$ | $$∀E>0 ∃∆=∆\left(E\right)>0 :$$$$x>∆ => $$$$ f\left(x\right)<-E$$ |  |
| 12 | $$\lim\_{x\to \infty }f\left(x\right)=-\infty $$ | $$∀E>0 ∃∆=∆\left(E\right)>0 :$$$$\left|x\right|>∆ => $$$$ f\left(x\right)<-E$$ |  |
| *13* | $$\lim\_{x\to a}f\left(x\right)=+\infty $$ | $$∀E>0 ∃δ=δ\left(E\right)>0 :$$$$0<\left|x-a\right|<δ => $$$$ f\left(x\right)>E $$ |  |
| 14 | $$\lim\_{x\to a+0}f\left(x\right)=+\infty $$ | $$∀E>0 ∃δ=δ\left(E\right)>0 :$$$$0<x-a<δ => $$$$f\left(x\right)>E $$ |  |
| 15 | $$\lim\_{x\to a-0}f\left(x\right)=+\infty $$ | $$∀E>0 ∃δ=δ\left(E\right)>0 :$$$$-δ<x-a<0 => $$$$ f\left(x\right)>E$$ |  |
| 16 | $$\lim\_{x\to -\infty }f\left(x\right)=+\infty $$ | $$∀E>0 ∃∆=∆\left(E\right)>0 :$$$$x<-∆ => $$$$ f\left(x\right)>E$$ |  |
| 17 | $$\lim\_{x\to +\infty }f\left(x\right)=+\infty $$ | $$∀E>0 ∃∆=∆\left(E\right)>0 :$$$$x>∆ => $$$$ f\left(x\right)>E$$ |  |
| 18 | $$\lim\_{x\to \infty }f\left(x\right)=+\infty $$ | $$∀E>0 ∃∆=∆\left(E\right)>0 :$$$$\left|x\right|>∆ => $$$$ f\left(x\right)>E$$ |  |
| 19 | $$\lim\_{x\to a}f\left(x\right)=\infty $$ | $$∀E>0 ∃δ=δ\left(E\right)>0 :$$$$0<\left|x-a\right|<δ => $$$$ \left|f\left(x\right)\right|>E $$ |  |
| 20 | $$\lim\_{x\to a+0}f\left(x\right)=\infty $$ | $$∀E>0 ∃δ=δ\left(E\right)>0 :$$$$0<x-a<δ => $$$$\left|f\left(x\right)\right|>E $$ |  |
| 21 | $$\lim\_{x\to a-0}f\left(x\right)=\infty $$ | $$∀E>0 ∃δ=δ\left(E\right)>0 :$$$$-δ<x-a<0 => $$$$ \left|f\left(x\right)\right|>E$$ |  |
| 22 | $$\lim\_{x\to -\infty }f\left(x\right)=\infty $$ | $$∀E>0 ∃∆=∆\left(E\right)>0 :$$$$x<-∆ => $$$$ \left|f\left(x\right)\right|>E$$ |  |
| 23 | $$\lim\_{x\to +\infty }f\left(x\right)=\infty $$ | $$∀E>0 ∃∆=∆\left(E\right)>0 :$$$$x>∆ => $$$$ \left|f\left(x\right)\right|>E$$ |  |
| 24 | $$\lim\_{x\to \infty }f\left(x\right)=\infty $$ | $$∀E>0 ∃∆=∆\left(E\right)>0 :$$$$\left|x\right|>∆ => $$$$ \left|f\left(x\right)\right|>E$$ |  |

Литература

1. Вся высшая математика. Том 1.  *Краснов М.Л., Киселев А.И. и др.* ,М.: Из-во: Едиториал УРСС, 2002. — 328 с.

2. Математический анализ. Начальный курс/В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. Под ред. А. Н. Тихонова,— 2-е изд., перераб., — М.: Изд-во МГУ, 1985. — 662 с.